Baccalauréat, série S – La Réunion, correction

29 juin 2010

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthononnal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. (a) Sens de variation de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction f est donc croissante sur $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

(b) Limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to -1^+} 1+x = 0^+ \text{ et } \lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 1+x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

Tableau de variations de f :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty$:

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} 1 - x + \ln(1+x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to -1^+} 1+x = 0^+,\ \lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to -1} 1-x = 2$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 1+x = +\infty \text{ et } \lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} = \lim_{x\to +\infty} (1+x)\left(\frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$$

(c) Sens de variation de la fonction g

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ du signe de } -x \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;\,+\infty[$.
Elle possède une tange,nte horizonate au point d'abscisse 0.
Tableau de variations de la fonction g :

x	-1		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(d) Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-1\ ;\ 0[$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\ ;\ 1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté α dans $]-1\ ;\ 0[$.

Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\ ;\ 1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté β dans $]0\ ;\ +\infty[$.

De plus :

$$\begin{cases} g(2) \simeq 0,0986 > 0 \\ g(3) \simeq -0,614 < 0 \end{cases} \Longrightarrow 2 \leqslant \beta \leqslant 3$$

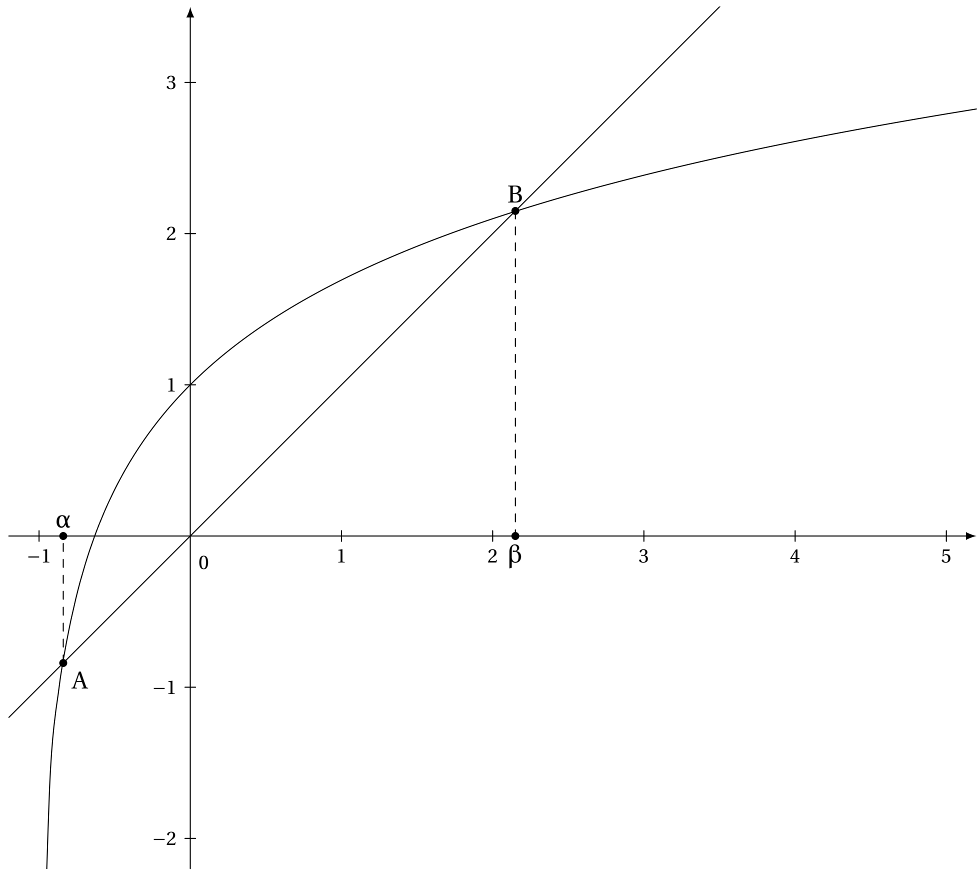
(e) Signe de $g(x)$:

- $-1 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow g(x) \leqslant g(\alpha) = 0$. (La fonction g est croissante sur $[-1;\alpha[$).
- $\alpha \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow g(\alpha) = 0 \leqslant g(x)$. (La fonction g est croissante sur $[\alpha;0]$).
- $0 \leqslant x \leqslant \beta \Longrightarrow g(x) \geqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[0;\beta[$).
- $x \geqslant \beta \Longrightarrow g(x) \leqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[\beta;+\infty[$).

x	-1		α		β		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de D		$\mathscr{C}_f <$ (D)	A	$\mathscr{C}_f >$ (D)	B	$\mathscr{C}_f <$ (D)	

Position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D :

- $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite D pour $x \in]\alpha;\beta[$.
- $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite D pour $x \in]-1;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$.



Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

1. Pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$. Démonstration par récurrence :
   - On a $2 \leqslant u_0 = 2 \leqslant \beta$
   - Supposons que, pour un n donné, on ait : $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$, alors, la fonction f étant croissante sur $[2\,;\beta]$:

   $$2 \leqslant u_n \leqslant \beta \Longrightarrow \boxed{2} \leqslant 2,09861228867 \simeq f(2) \leqslant f(u_n) = \boxed{u_{n+1}} \leqslant f(\beta) = \boxed{\beta}$$

   - Ainsi, $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est croissante (*en utilisant le signe de $g(x)$ étudié plus haut*) :

   $$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0 \text{ sur } [2\,;\beta]$$

   Donc, (u_n) étant une suite croissante et majorée par β, elle est convergente.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie I

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

On note V_1, N_1 et R_1 (respectivement V_2, N_2 et R_2) la couleur obtenue au premier (respectivement second) jet.

1. Probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires :

   $$\text{Les deux jets étant indépendants, nous pouvons écrire : } p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».

   $$p(C) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap N_2) + p(R_1 \cap R_2) = p(V_1) \times p(V_2) + p(N_1) \times p(N_2) + p(R_1) \times p(R_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{7}{18}$$

3. Probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes :

   $$p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes :

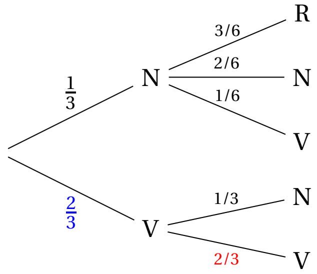
   $$V \subset C \Longrightarrow C \cap V = V \Longrightarrow p_C(V) = \frac{p(C \cap V)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{7}{18}} = \frac{1}{36} \times \frac{36}{14} = \frac{1}{14}$$

Partie II

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. (a) Arbre de probabilités traduisant cette situation. :



(b) Probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer :

$$p_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{V}_2) = \frac{2}{3}$$

2. Probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$:

$$p(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) = p_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{V}_2) \times p(\mathrm{V}_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3. Probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer :

$$p(\mathrm{V}_2) = p(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{V}_2) + p(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) = p_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{V}_2) \times p(\mathrm{V}_1) + p_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{V}_2) \times p(\mathrm{V}_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, vérifiant la condition (E) : pour tout nombre réel x strictement positif, $xf'(x) - f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$.

1. Une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie, pour tout x de $]0 ; +\infty[$:

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x^2\mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \mathrm{e}^{2x}$$

2. Ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ qui vérifient la condition (E) :

$$f \text{ vérifie E} \Longrightarrow g'(x) = \mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + k = \frac{f(x)}{x} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + kx \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Réciproquement :

$$f(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + kx \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} + k \Longrightarrow xf'(x) - f(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + x^2\mathrm{e}^{2x} + kx - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - kx = x^2\mathrm{e}^{2x}$$

3. Fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant la condition (E) et s'annulant en $\frac{1}{2}$:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^1 + k\frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow k = -\frac{\mathrm{e}}{2} \Longrightarrow h(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2}x$$

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2}x = \frac{\mathrm{e}}{2}x\left(\mathrm{e}^{2x-1} - 1\right)$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O} ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1. Signe de $h(x)$: x étant positif, $h(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{2x-1}-1$ et, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{2x-1}-1\geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{2x-1}\geqslant \mathrm{e}^0 \iff 2x-1\geqslant 0 \iff x\geqslant \frac{1}{2}$$

Ainsi :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $h(x)$	0	$-$	0	$+$	

2. (a) À l'aide d'une intégration par parties :

on pose : $\begin{array}{l} u=x \\ v'(x)=\mathrm{e}^{2x}\end{array}$, ainsi : $\begin{array}{l} u'=1 \\ v(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{array}$ et :

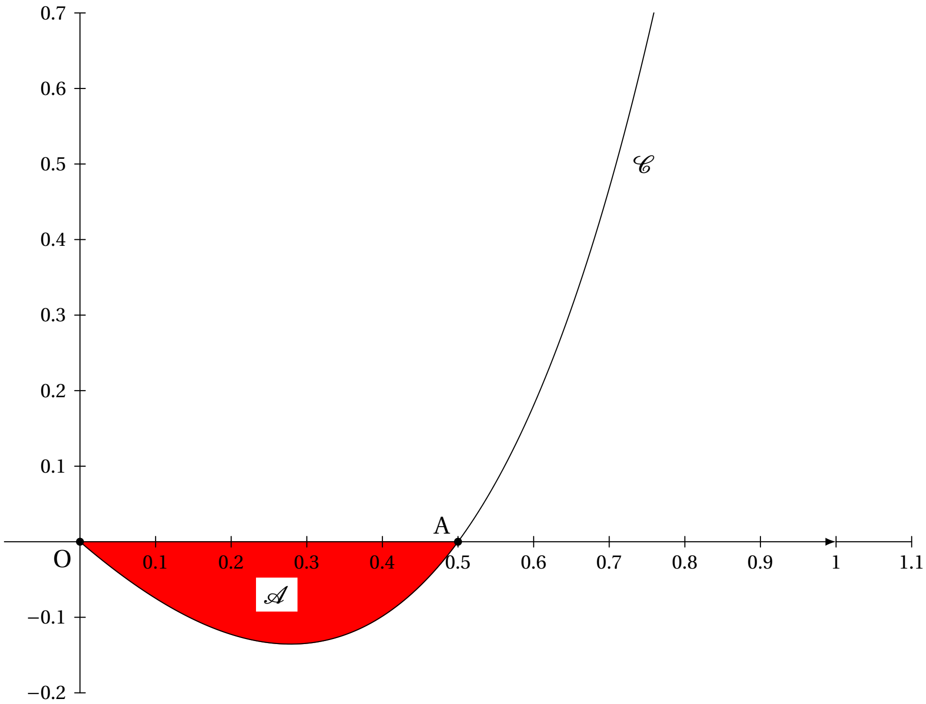
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{e} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\mathrm{e} - \frac{1}{4}\mathrm{e} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}}{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} - \left[\frac{\mathrm{e}}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{\mathrm{e}}{16} = \frac{2-\mathrm{e}}{16} \simeq -0,04489$$

(b) La fonction h étant négative sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, l'intégrale calculée plus haut est négative.
Ainsi, en unité d'aire, la valeur exacte $\mathscr{A}$ de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ est :

$$\mathscr{A} = \left|\frac{2-\mathrm{e}}{16}\right| = \frac{\mathrm{e}-2}{16}$$



Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\arg(b-a) + \arg(c-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \qquad [2\pi]\end{aligned}$$

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $1+\mathrm{i}$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M′ d'affixe

$$z' = \frac{z-1-\mathrm{i}}{z}$$

Le point M′ est appelé le point image du point M.

1. (a) Affixe du point B′, sous forme algébrique, image du point B d'affixe i :

$$z_{B'} = \frac{\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{-1}{\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = \mathrm{i}$$

   (b) Pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M′ est telle que $z' \neq 1$. En effet :

$$z' = 1 \iff \frac{z-1-\mathrm{i}}{z} = 1 \iff z-1-\mathrm{i} = z \iff -1-\mathrm{i} = 0 \quad \text{impossible}$$

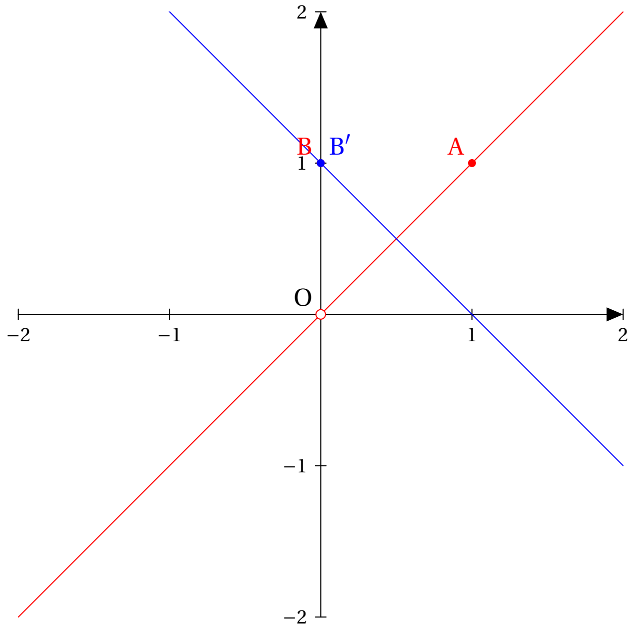
2. Ensemble des points M du plan d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ non nulle pour lesquels l'affixe du point M′ est telle que $|z'| = 1$ est la droite d'équation $y = -x+1$:

$$\begin{aligned}|z'| = 1 \iff \left|\frac{z-1-\mathrm{i}}{z}\right| = 1 \iff |z-1-\mathrm{i}|^2 = |z|^2 \iff |x+\mathrm{i}y-1-\mathrm{i}|^2 = |x+\mathrm{i}y|^2\\ \iff (x-1)^2+(y-1)^2 = x^2+y^2 \iff x+y-1 = 0 \iff y = -x+1\end{aligned}$$

3. Ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M′ est un nombre réel est la droite (OB) privée de O :

$$z' \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Arg}(z') = \operatorname{Arg}\left(\frac{z-1-\mathrm{i}}{z}\right) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}\right) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff \text{O, A et M alignés}$$

   L'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M′ est un nombre réel est donc la droite (AO), privée du point O.



EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Bien respecter les notations du sujet.

s est une similitude directe du plan si, et seulement si, son écriture complexe est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.

Notons a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D.

$$\left\{\begin{array}{l} s(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \\ s(\mathrm{C}) = \mathrm{D} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \alpha a + \beta \\ d = \alpha c + \beta \end{array}\right.$$

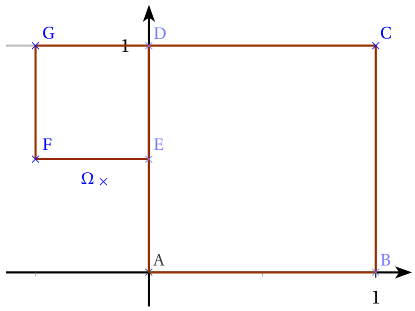
s est une similitude directe du plan si, et seulement si, ce dernier système admet une unique solution pour (α, β).

Or,

$$\left\{\begin{array}{l} b = \alpha a + \beta \\ d = \alpha c + \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \alpha a + d - \alpha c \\ d - \alpha c = \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b - d = \alpha(a - c) \\ d - \alpha c = \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{b-d}{a-c} \\ \beta = d - \dfrac{b-d}{a-c} \times c \end{array}\right. \quad \text{car } \mathrm{A} \neq \mathrm{C}$$

Le système ayant une unique solution, il existe une unique similitude directe transformant A en B et C en D.

Partie II :



1. (a)
   (b) $a = 0,\ b = 1,\ c = 1 + i,\ d = i,\ e = \frac{1}{2}i,\ f = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,\ g = -\frac{1}{2} + i.$
   (c) Comme D $\neq$ B et F $\neq$ D, d'après la première partie, il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(\mathrm{D}) = \mathrm{F}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$.

2. Par définition s : $\begin{array}{l} \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{F} \\ \mathrm{B} \longmapsto \mathrm{D} \end{array}$

   (a) Le rapport de s est donc $k = \dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{DB}}$ et l'angle $\theta = (\vec{\mathrm{DB}}, \vec{\mathrm{FD}})$.

   $$k = \left|\frac{d-f}{d-b}\right| = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right|}{|-1+i|} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}.$$

   $$\theta = (\vec{\mathrm{DB}}, \vec{\mathrm{FD}}) = \pi + (\vec{\mathrm{DB}}, \vec{\mathrm{DF}}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad [2\pi]$$

   s a pour rapport $\frac{1}{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{2}$.

   (b) Avec les notations précédentes, on sait que $\alpha = ke^{i\theta} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$.

   On détermine β en écrivant que $s(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$.

   $s(\mathrm{B}) = \mathrm{D} \Longleftrightarrow d = \frac{1}{2}ib + \beta \Longleftrightarrow i = \frac{1}{2}i + \beta \Longleftrightarrow \beta = \frac{1}{2}i.$

   Finalement, l'écriture complexe de s est

   $$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}i$$

   (c) *On peut remarquer que s a bien un centre car* $\alpha \neq 1$, *donc cette similitude directe n'est pas une translation.*

   Le centre Ω de la similitude directe s a pour affixe l'unique solution de l'équation $z = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}i$.

   On trouve sans difficulté que le centre a pour affixe $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.